SESIÓN 3

SERIES, SUCESIONES Y LÍMITES

I. CONTENIDOS:

1. Sucesiones y series
2. Idea intuitiva de límite
3. Ejercicios resueltos
4.- Estrategias Centradas en el Aprendizaje: Ejercicios propuestos

II. OBJETIVOS:

Al término de la Clase, el alumno:

- Comprenderá la diferencia y la semejanza entre sucesión y serie
- Aplicará fórmulas para calcular una serie
- Comprenderá el concepto de límite

III. PROBLEMATIZACIÓN:

Comenta las preguntas con tu Asesor y selecciona las ideas más significativas.

- ¿Hasta qué valor puede llegar la suma de una serie de números que sea infinita?
- ¿Si calculamos el área de un polígono de 8, 16, 32, 64,……., etc. lados se llega a un "límite"?

IV. TEXTO INFORMATIVO-FORMATIVO:

1.1. Sucesiones y series

Sucesión: Una sucesión es un conjunto de términos formados por números que se agrupan de acuerdo a una ley o regla determinada, en este conjunto hay un número designado como el primero, otro como el segundo, otro como el tercero y así sucesivamente.

En el caso de que el número de términos sea contable se le llama **sucesión finita** en caso de que los términos sean incontables se llama **sucesión infimita**

Las sucesiones son funciones donde el dominio es el conjunto de los números enteros positivos (0, 1, 2, 3,4,…,..) o bien un subconjunto de los mismos.

Consideremos el conjunto de números: 1, 4, 7, 10, 13, 16, es una sucesión finita.

En tanto la sucesión 1/3, 1/5, 1/7, 1/9, 1/11,…………es una sucesión infinita

Serie: Podemos definir a una serie como la suma indicada de los términos de una sucesión. Si una serie consta de un número finito de términos se llama serie finita, si por el contrario consta de un número infinito de términos se llama serie infinita. De acuerdo a esto, de las sucesiones anteriores obtenemos las series

1 + 4 + 7 + 10 + 13 + 16

1/3 + 1/5 + 1/7 + 1/9 + 1/11 +………..

Serie convergente: Se dice que una serie es convergente cuando la suma de sus términos tiende a un límite o que converge a un valor.

Serie divergente: Se dice que una serie es divergente cuando la suma de sus términos no tiende hacia un límite.

Para indicar la suma de los términos de una serie en una forma simplificada empleamos la letra griega $\sum$ (sigma mayúscula) los índices arriba y debajo de este símbolo nos indican de donde a donde abarca la suma. Veamos los siguientes ejemplos:

$\sum_{j=1}^{n} a_j = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots\ldots + a_n$ serie finita

$\sum_{j=1}^{\infty} a_j = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots\ldots$ serie infinita

Ejemplos: Desarrollar las siguientes sumatorias

$\sum_{a=1}^{5} a = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$

$\sum_{n=1}^{5} n^n = (1)^1 + (2)^2 + (3)^3 + (4)^4 + (5)^5 = 1 + 4 + 27 + 256 + 3125 = 3143$

Serie geométrica: Es una serie en la cual todos los términos posteriores al primero, se deducen del anterior multiplicándolo por una constante llamada *razón* de la serie. Esta razón se puede obtener también, al dividir cualquier término posterior al primero entre el inmediato anterior.

Se representa en su forma general de la siguiente manera:

$a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^3 + ar^4 + \ldots\ldots\ldots + ar^{n-1}$

Fórmulas usadas en las series geométricas

1) Para el cálculo del enésimo o último término: $l = ar^{n-1}$

2) Para el cálculo de la suma de los *n* primeros términos podemos emplear una de las siguientes fórmulas, dependiendo del valor de r.

Si $|r| < 1$ entonces empleamos la fórmula: $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

Si $|r| > 1$ entonces empleamos la fórmula: $S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$

Siendo: a = primer término; r = razón de la serie; n = número de términos; *l* = término enésimo o último término

S = suma de los *n* primeros términos

2.1. Idea intuitiva de límite

Los orígenes del cálculo se remontan hace aproximadamente 2500 años con los antiguos griegos, quienes calcularon las áreas de diversas figuras geométricas mediante el llamado “método del agotamiento”, sabían por ejemplo como calcular el área “A” de un polígono irregular al dividirlo en triángulos y sumar las áreas de estos, como en la fig.

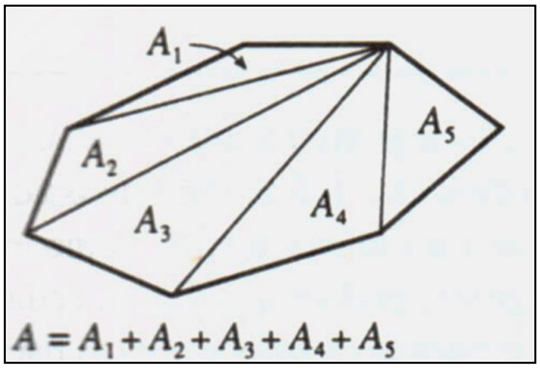

Fig. 1

Por supuesto el problema se complica si queremos hallar el área de una figura curva. A modo de ejemplo consideremos que queremos calcular el área de un círculo como lo hacían los griegos por el método de agotamiento. Para esto se tienen que inscribir dentro del círculo en cuestión una serie de polígonos, se puede empezar por un triangulo y calcular el área que ocupa, como se puede ver el margen de error es grande, por lo que debemos incrementar el número de lados del polígono para ir minimizando el error, obviamente, cada vez que incrementamos el número de lados del polígono nos vamos acercando más al área del círculo, sin embargo cabe preguntarnos, a medida que incrementamos el número de lados del polígono y calculamos su área, ¿tendrá un “límite”? y de ser así ¿Cuál será ese “límite”?

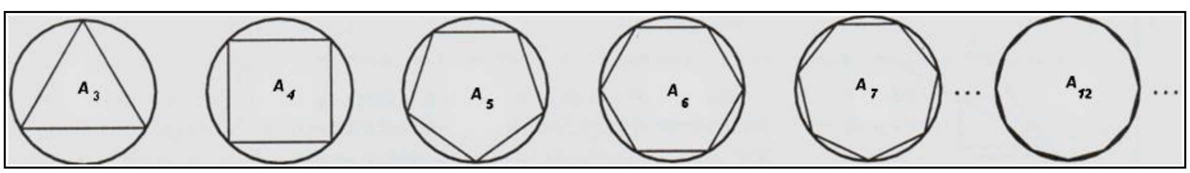

Fig. 2

Si consideramos que A_n es el área del polígono inscrito de *n* lados, al aumentar *n,* podemos intuir que A_n se aproxima cada vez más y con más exactitud al área del círculo, entonces podemos decir, que el área del círculo es el “*límite”* de las áreas de los polígonos inscritos y podemos escribir:

$$Ac = \lim_{n \to \infty} An$$

Esta expresión nos dice que si el número de lados del polígono se incrementa hasta el infinito el área de este tendrá como límite el área del círculo. Los antiguos matemáticos griegos nos dieron una aplicación explícita al concepto de límite como lo conocemos en la actualidad, pero utilizando un razonamiento intuitivo, el filosofo griego Eudoxio quien vivió en el siglo V antes de nuestra era utilizó el método del agotamiento para probar la conocida fórmula $A_c = \pi r^2$ con la que se puede calcular el área del círculo.

Esta es la idea básica de lo que podemos conceptualizar como límite.

3.1. Ejercicios resueltos

1. Determinar cuáles de las siguientes son series geométricas (s.g.)

a) 3, 6, 12,……….. …………… Aplicando la definición de una s.g. Tenemos $\frac{6}{3} = \frac{12}{6} = 2$ entonces r = 2

b) 16, 12, 9,………………...Aplicando la definición de una s.g. Tenemos $\frac{12}{16} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ entonces $r = \frac{3}{4}$

c) −1, 3, -9,…………………Aplicando la definición de una s.g. tenemos: $\frac{3}{-1} = \frac{-9}{3} = -3 \quad r = -3$

d) 1, 4, 9 , …………….. $\frac{4}{1} \neq \frac{9}{4}$ no es una s.g.

e) $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{2}{9};$……………. $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3};$ $r = \frac{2}{3}$

2) Calcular el octavo término y la suma de los ocho primeros términos de la s.g. 4 , 8 , 16, ………

De acuerdo a esto tenemos los siguientes datos: a = 4: $r = \frac{8}{4} = \frac{16}{8} = 2$; $n = 8$

Para el cálculo del octavo término empleamos la fórmula: $l = ar^{n-1}$ sustituyendo valores en esta fórmula

$l = (4)(2^{8-1}) = 4(2^7) = 4(128) = 512$ este es el valor del octavo término.

Para el cálculo de la suma de los ocho primeros términos, empleamos la fórmula: S =$\frac{A\,(r^{n}-1)}{r-1}$; Recordemos que esta fórmula se emplea si |r| > 1; sustituyendo valores en la fórmula, tenemos, S=$\frac{4(2^{8}-1)}{2-1} = \frac{4(256-1)}{1} = 1020$; Que es la suma de los ocho primeros términos.

3) Calcular el séptimo término y la suma de los primeros siete primeros términos de la s.g. 9, -6, 4, ……..

De acuerdo a los datos tenemos. a = 9; r = $\frac{-6}{9} = \frac{4}{-6} = -\frac{2}{3}$; Empleamos la fórmula: $l = ar^{n-1}$ sustituyendo valores, tenemos: $l = 9(-\frac{2}{3})^{7-1} = 9(-\frac{2}{3})^{6} = \frac{64}{81}$ que es el séptimo término

Para el cálculo del séptimo término, empleamos la fórmula: S $= \frac{a(1-r^{n}}{1-r}$

; Sustituyendo valores en la fórmula, tenemos S = $\frac{9(1-(-\frac{2}{3})^{7})}{1-(-\frac{2}{3})} = \frac{9(1-\left(-\frac{128}{2187}\right))}{\frac{5}{3}} = \frac{463}{81}$; Que es la suma de los siete primeros términos.

4) El segundo término de una s.g. es 3 y el quinto término es $\frac{81}{8}$; Calcular el octavo término.

Recuerde que para calcular cualquier término de la serie empleamos la fórmula: $l = ar^{n-1}$; de acuerdo a los datos

$\frac{81}{8} = ar^{4}$; Además nos dice que el segundo término es, ar = 3 , luego entonces la razón será $\frac{ar^{4}}{ar} = \frac{\frac{81}{8}}{3}$;

Simplificando: $r^{3} = \frac{27}{8}$; despejando: $r = \frac{3}{2}$; como nos pide calcular el octavo término: $l = ar^{n-1}$; $l = ar^{8-1}$;

$ar^{7} = (ar^{4})r^{3} = \frac{81}{8}(\frac{27}{8}) = \frac{2187}{64}$: Que es el octavo término.

4.1. ESTRATEGIAS CENTRADAS EN EL APRENDIZAJE: Ejercicios propuestos.

1. Calcule el enésimo término y la suma del los *n* primeros términos de las siguientes series geométricas para el valor de *n* especificado.

a) 2, 3, 9⁄2,……………….*n = 5*

b) 6, -12, 24 , ……………………..*n = 9*

c) 1 , 1⁄2 , 1⁄4 , …………….*n = 10*   d) 1 , 3 , 9 , …………………………*n = 8*

e) 8, 4, 2, ………………..*n = 12*   f)√3 , 3 , 3 √3 ,………………………*n = 8*

2. Calcule la suma de los 8 primeros términos de las siguiente s. g.

a) 1, 1⁄3, 1⁄9,………….   b) 4⁄3, 2, .3,………………….   c) 1, -2, 4,………………….

3. El primer término de una s. g. es 3 y el último es 48. Se sabe que cada término es el doble del anterior, calcular el número de términos y la su suma.